Matemática Intervalar en la Resolución del Problema del Flujo de Potencia Eléctrica

Eustaquio A. Martínez
amartinez@politec.une.edu.py
Universidad Nacional del Este
Casilla de Correos: 340
Ciudad del Este - Paraguay

Tiaraju Asmuz Diverio
diverio@inf.ufrgs.br
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Caixa Postal: 15064-91501-970
Potro Alegre - Brasil

Benjamín Barán
bbaran@cnc.una.py
Centro Nacional de Computación
Universidad Nacional de Asunción
Casilla de Correos: 1439 - Campus Universitario, San Lorenzo - Paraguay

RESUMEN

El presente trabajo propone la utilización de métodos intervalares para la resolución de sistemas eléctricos. En particular propone una variante del método de *Newton Intervalar con Bisección Generalizada* para la resolución del problema del Flujo de Potencia eléctrica, tradicionalmente resuelto con alguna variante del método de *Newton-Raphson* (puntual).

El trabajo propone un método intervalar, describe el algoritmo implementado y presenta resultados experimentales, comparándolos con el método de *Newton-Raphson* tradicional, comprobándose las ventajas en lo relativo a la búsqueda de todas las soluciones en un intervalo de interés o la inexistencia de solución en dicho intervalo, así como facilidades para controlar la precisión del resultado, al costo de mayor uso de recursos computacionales.

Palabras Claves: Informática en Ingeniería, Flujo de Potencia, Sistemas no Lineales, Métodos Intervalares, Método de Newton-Raphson, Método de Bisección.

1. INTRODUCCIÓN

La matemática intervalar se define sobre un conjunto de intervalos, cuyos extremos pueden ser números reales. Los intervalos son útiles en la representación de valores desconocidos o valores continuos [2, 8]. Un intervalo de extremos reales se puede escribir como [18]:

$$\mathrm{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \tag{1}$$

donde $\underline{x} \leq \overline{x}$ y $\overline{x}, \underline{x} \in R$. Note que $\mathrm{x} \in IR$ (intervalos reales) . Sin embargo , esta definición fácilmente puede ser extendida a los complejos en cuyo caso $\overline{x}, \underline{x} \in C$.

Sobre IR se definen vectores, matrices y una serie de operaciones aritméticas básicas como adición, sustracción, multiplicación y división. Es posible también extender las funciones reales a intervalares reemplazando las variable puntuales por intervalos tipo (1) [2, 8, 18].

Una de las primeras apariciones de la matemática intervalar se verificó alrededor del período comprendido entre 1924 y 1931. Sin embargo un desarrollo más moderno recién se inició con R.E. Moore, en 1966 [8]. Desde entonces cientos de artículos científicos y libros han aparecido sobre el tema, así como herramientas de software y compiladores que realizan cálculos con esta matemática, como el Pascal-XSC [6], C-XSC [13] y INTLIB [9], por citar algunos.

La matemática intervalar también abrió espacios en el ámbito del análisis y solución de sistemas de ecuaciones. Un estudio sobre la solución de sistemas lineales con coeficientes intervalares se encuentra en [5], donde se realiza un análisis con respecto a la inestabilidad de los sistemas teniendo en cuenta su acondicionamiento. Existen estudios comparativos de los principales métodos de resolución de sistemas lineales intervalares [15], también se puede encontrar estudios de los métodos de Newton para la solución de ecuaciones intervalares no lineales [12], así como estudios de los métodos de precondicionamiento utilizados por estos [16].

Se puede encontrar ejemplos de la aplicación de métodos intervalares en el ámbito de la ingeniería química [4] y propuestas de solución de redes AC a través del uso de métodos intervalares [19], (un ejemplo claro de aplicación a la Ingeniería eléctrica). Otro ámbito de aplicación creciente de los métodos intervalares es el de los problemas de optimización [3, 10].

Se puede afirmar que el gran mérito de la matemática intervalar se basa en su capacidad de representar en el computador en forma de intervalos, valores no representables por la máquina. La exactitud y precisión que se logran con los métodos intervalares justifica plenamente su aplicación en el ámbito científico [2], donde se encuentran sus mayores adeptos.

Mostrar la factibilidad de la utilización de un enfoque intervalar en la resolución de uno de los problemas clásicos de la ingeniería eléctrica i.e. el problema de Flujo de Carga o Flujo de Potencia, es la propuesta de este trabajo. Para esto, la sección 2 presenta el problema en base a uno de los métodos clásicos, el de *Newton-Raphson* (puntual). La sección 3 presenta la formulación matemática en el ámbito intervalar. La sección 4 analiza los resultados experimentales de la resolución de problemas ejemplos. Las conclusiones y discusión de los resultados obtenidos se dejan para la sección 5.

2. EL PROBLEMA DEL FLUJO DE POTENCIA ELÉCTRICA

Antes del advenimiento de las computadoras digitales, la solución del problema del flujo de potencia eléctrica o flujo de carga era obtenido a través del uso de analizadores de red, estos eran modelos reducidos de las redes eléctricas sometidas a estudios [21, 22]. El primer método de solución automático recién aparece en la literatura en 1956. Desde entonces una gran cantidad de métodos fueron propuestos pudiendo destacarse los métodos de la Matriz Y, de la Matriz Z y los basados en el método de *Newton-Raphson* [22].

2.1. Formulación Matemática del Problema

El problema del Flujo de Potencia eléctrica puede ser formulado como un sistema cuasilineal de ecuaciones [1]

$$Yx = I(x) \qquad (2)$$

donde Y es la matriz de las admitancias, $Y = \{y_{ki}\} \in C^{nxn}$, con $y_{ki} = G_{ki} + B_{ki} \in C$ y $x \in C^n$ representa al vector de las tensiones, y $F(x)$ el vector de la corriente eléctrica $I \in C^n$. La tensión x_k del k-ésimo nodo o barra también puede ser expresado en coordenadas polares:

$$x_k = Ve^{j\theta_k} \qquad \forall k \in \{1,\dots,n\} \qquad (3)$$

El comportamiento estacionario del sistema eléctrico puede ser representado por la ecuación (2) conjuntamente con una serie de restricciones operacionales con respecto a las potencias y las tensiones de cada barra de la red. De acuerdo a las magnitudes especificadas para cada una de ellas se puede identificar 3 tipos de barras [22] (ver tabla 1):

Tabla 1: Tipos de Barras de un Sistema Eléctrico

Tipo de Barra	Cantidades Conocidas (Datos)	Cantidades Desconocidas (Incógnitas)
Slack	V, θ	P, Q
PV	V, P	Q, θ
PQ	P, Q	V, θ

La barra Slack o de referencia es un concepto ficticio creado con el objetivo proveer una referencia angular para el sistema y permitir el cierre del balance de potencia del sistema, teniendo en cuenta que las pérdidas de la red no son conocidas antes del cálculo final.

Considerando que la corriente $I_k(x_k)$ en una barra k no es especificada, ella puede ser calculada como [21]:

$$I_k(x_k) = \left(\frac{S_k}{x_k}\right)^* = \frac{P_k - jQ_k}{V_k e^{-j\theta_k}} \quad \forall k \in \{1,\ldots,n\} \tag{4}$$

donde

- S_k potencia inyectada en la barra k
- P_k potencia activa
- Q_k potencia reactiva
- V_k módulo de la tensión en la barra k
- θ_k ángulo de fase de la tensión de la barra k
- $*$ complejo conjugado

La formulación del problema en coordenadas cartesianas no resulta conveniente considerando lo que expresa (2) dado que la magnitud de la tensión a ser controlada no aparece explícitamente. Por tal motivo el problema se formula en coordenadas polares como [1]:

$$P_k = V_k \sum\nolimits_{i \in K} V_i (G_{ik} \cos\theta_{ik} + B_{ki} \operatorname{sen}\theta_{ik}) \tag{5}$$

$$Q_k = V_k \sum\nolimits_{i \in K} V_i (G_{ik} \operatorname{sen}\theta_{ik} - B_{ki} \cos\theta_{ik}) \tag{6}$$

$$\theta_{ki} = \theta_k - \theta_i \quad \forall k \in \{1,\ldots,n\}$$

donde K es el conjunto de todas las barras adyacentes a k y la propia barra k.

2.2. Método Clásico de Solución

A continuación se presenta la formulación del problema para el método de *Newton-Raphson*, como base para la formulación matemática de la versión intervalar. En base a las expresiones (5) y (6) y para pequeñas variaciones en las variables θ y V, se pueden obtener las siguientes relaciones lineales [22].

$$\Delta P_k = \sum\nolimits_{i \in K} \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} \Delta\theta_i + \sum\nolimits_{i \in K} \frac{\partial P_k}{\partial V_k} \Delta V_i \tag{7}$$

$$\Delta Q_k = \sum\nolimits_{i\in K} \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k}\Delta\theta_i + \sum\nolimits_{i\in K} \frac{\partial Q_k}{\partial V_k}\Delta V_i \qquad (8)$$

Para resolver el problema se utiliza un método iterativo, por lo que resulta necesario establecer el criterio de parada. El criterio más utilizado es el desajuste de potencia (o *power mismatch*) que debe ser menor que una tolerancia ξ especificada. El desajuste de potencia es definido como:

$$\Delta S = \max_i \left\{ |\Delta P_i|; |\Delta Q_i| \right\} \text{ donde } \Delta P_i + j\Delta Q_i = S_i - x_i I_i^* \qquad (9)$$

Matricialmente el método de *Newton-Raphson*, se puede escribir como [20, 22]:

$$\begin{bmatrix} \Delta P^k \\ \Delta Q^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^k & N^k \\ J^k & L^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta^k \\ \dfrac{\Delta V^k}{V^k} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

donde:

- ΔP vector de errores de P para todas las barras PQ y PV
- ΔQ vector de errores de Q para todas las barras PQ
- $\Delta\theta$ vector de correcciones de θ para todas las barras PQ y PV
- ΔV vector de correcciones de V para todas las barras PQ

Nótese que, $\Delta x^k = \begin{bmatrix} \Delta\theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix}$

Las submatrices $H = \{h_{ij}\} \in R^{a_1 x a_1}$, $N = \{n_{ij}\} \in R^{a_1 x a_2}$, $J = \{j_{ij}\} \in R^{a_2 x a_1}$, y $L = \{l_{ij}\} \in R^{a_2 x a_2}$ donde a_1 es el número de barras *PV+PQ* y a_2 el número de barras *PQ* son las componentes del Jacobiano y poseen los siguientes elementos:

para $i \neq j$

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = V_i V_j (G_{ij} \operatorname{sen}\theta_{ij} - B_{ij}\cos\theta_{ij}) \qquad (11)$$

$$N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i V_j (G_{ij} \cos\theta_{ij} + B_{ij}\operatorname{sen}\theta_{ij}) \qquad (12)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = -V_i V_j (G_{ij} \cos\theta_{ij} + B_{ij}\operatorname{sen}\theta_{ij}) \qquad (13)$$

$$L_{ij} = V_j \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i V_j (G_{ij} \operatorname{sen}\theta_{ij} - B_{ij}\cos\theta_{ij}) \qquad (14)$$

y para $i = j$

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -Q_i - B_{ii} V_i^2 \qquad (15)$$

$$N_{ii} = V_i \frac{\partial P_i}{\partial V_i} = P_i + G_{ii} V_i^2 \tag{16}$$

$$J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = P_i - G_{ii} V_i^2 \tag{17}$$

$$L_{ii} = V_i \frac{\partial P_i}{\partial V_i} = Q_i - B_{ii} V_i^2 \tag{18}$$

A cada iteración se calculan ΔV y $\Delta\theta$ con (10) y se actualizan V y θ hasta que el error o desajuste de potencia sea menor o igual a ξ. Para mayor claridad, a continuación se presenta el algoritmo del método de *Newton-Raphson*.

Algoritmo 1

(1.1) Estimar valores iniciales para los ángulos y las tensiones de cada barra, $x^0 = \begin{bmatrix} \theta^0 \\ V^0 \end{bmatrix}$;

(1.2) Calcular las potencias activas P y reactivas Q para cada barra;

(1.3) Calcular el desajuste de potencias $F(x^k) = \begin{bmatrix} \Delta P^k \\ \Delta Q^k \end{bmatrix}$; { ecuaciones (7) y (8)}

(1.4) Si $\left|F(x^k)\right| \leq \xi$ terminar el algoritmo

Sino

Calcular Δx^k resolviendo (10);
Calcular $x^{k+1} = x^k - \Delta x^k$ y volver al paso (1.2);

Nótese que $\theta^0 = (\theta_1^{\,0},...,\theta_p^{\,0})^T$ y $V^0 = (V_1^{\,0},...,V_q^{\,0})^T$ donde p es el número de barras PV+PQ y q es el número de barras PQ.

3. ENFOQUE INTERVALAR DEL PROBLEMA DEL FLUJO POTENCIA ELÉCTRICA

Como en la práctica no se conocen los valores de los datos, sino buenas aproximaciones que están en un dado intervalo [21], resulta muy atractiva la posibilidad de utilizar matemática intervalar para resolver problemas de ingeniería eléctrica. Esta misma idea llevó a Okumura e Higashino a la utilización de la matemática intervalar en la solución de ecuaciones complejas de redes AC [19]. A diferencia de esta propuesta a continuación se propone la resolución de las ecuaciones analíticas del problema de Flujo de Potencia, tomando como base las expresiones (7) y (8), la formulación matemática para el método de *Newton-Raphson* (versión puntual) y las prestaciones del método de *Bisección Generalizado Intervalar de Newton* [7].

La utilización de un enfoque intervalar para la resolución de sistemas no lineales, propuesto en este trabajo, trae consigo algunas ventajas interesantes, como la alta exactitud y la verificación automática [2], así como pruebas de existencia de raíces y unicidad de soluciones [17]. En términos prácticos esto significa que si estimamos un intervalo como conteniendo la solución, el método encuentra tal solución si existe o indica la inexistencia de la solución en dicho intervalo, en este sentido, se tiene verificación automática. La alta exactitud se da gracias a que el método provee el intervalo de menor diámetro que contiene la solución con la precisión requerida.

El método de *Newton-Raphson* además de proveer convergencia cuadrática encuentra fácilmente la solución del problema del flujo de carga si la estimación inicial es cercana a la solución [22], por lo tanto, es importante conocer una región que contiene la solución. Afortunadamente, para la mayoría de los problemas prácticos se conoce el punto de operación del sistema eléctrico. Con el enfoque intervalar se puede encontrar la solución del problema, estimando un intervalo que contenga la región o intervalos cuya unión resulte en la región donde se busca tal solución y el método se encargará de indicar si existe o no dicha solución como también si es única [17]. Nótese que los métodos puntuales hoy utilizados no tienen estas importantes características.

En las siguientes subsecciones se presentan las herramientas matemáticas intervalares a ser utilizadas en la propuesta de resolución del problema, así como el algoritmo empleado para el efecto.

3.1. Método de Newton Intervalar

A continuación se presenta la generalización del método de Newton Intervalar para una sola incógnita. Una revisión de sus variaciones puede encontrarse en [11].

Sea $f : \mathrm{x} \to R$ donde $\mathrm{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \in IR$, con primera derivada continua sobre x. Suponiendo que existe $x^* \in \mathrm{x}$ tal que $f(x^*) = 0$, y también que existe un punto $x \in \mathrm{x}$, entonces, por el teorema del valor medio [12]:

$$f(x^*) = 0 = f(x) + f'(\zeta)(x^* - x) \qquad (19)$$

de donde:

$$x^* = x - \frac{f(x)}{f'(\zeta)} \qquad (20)$$

para algún $\zeta \in \mathrm{x}$.

Si $f'(\mathrm{x})$ es una extensión intervalar de la derivada de f sobre x [12]. Entonces :

$$x^* \in x - \frac{f(x)}{f'(\mathrm{x})} \qquad ; \forall x \in \mathrm{x} \qquad (21)$$

La ecuación (21) es la forma básica del operador Newtoniano de una variable

$$N(f, \mathrm{x}, x) = x - \frac{f(x)}{f'(\mathrm{x})} \qquad (22)$$

Como consecuencia de (22), cualquier solución de $f(x) = 0$ que se encuentre en x, también debe estar en $N(f, \mathrm{x}, x)$ [8; teorema 2]. Por consiguiente el método de Newton resultante es [12]:

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k \cap N(f, \mathrm{x}, x) \qquad (23)$$

donde $\cap$ denota intersección de intervalos.

Cuando $\mathrm{X}^{k+1} = \phi$, no hay raíz de $f(x)$ en X^k. Por consiguiente el método de Newton intervalar provee auto validación en el sentido de asegurar que si se escogió un intervalo X que no contiene la solución, el método así lo indica [18; teorema 5.2].

Para asegurar que todas las soluciones podrán encontrarse se agrega al método de Newton intervalar descrito el concepto de bisección. Esto es, si el intervalo X^{k+1} no es menor que X^k, se lo bisecciona para formar dos nuevos intervalos, con uno de estos se continua utilizando (23) y el otro se coloca en una pila para su consideración posterior [16]. De esta manera se puede asegurar que todas las soluciones que se encuentran en el intervalo podrán ser encontradas.

El método de Newton intervalar para sistemas de ecuaciones no lineales es análogo al de una ecuación con una incógnita, en el sentido de que utiliza una fórmula iterativa similar a (23), posee las mismas propiedades de convergencia cuadrática [18] y puede ser utilizado para probar la existencia y unicidad de soluciones [8, 12, 14, 17].

Un sistema no lineal puede ser escrito como:

$$F(X) = (f_1(X),\dots,f_n(X))^T = 0 \tag{24}$$

donde

$F : R^n \rightarrow R^n, X = (x_1, x_2,\dots,x_n)^T \in R^n$ y $\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i$ para $1 \leq i \leq n$, $\underline{x}_i$ y $\overline{x}_i$ son los límites inferior y superior de x_i.

Siguiendo el mismo razonamiento que llevó a (23), el sistema (24) puede ser transformado en un sistema intervalar lineal [4, 12, 16]:

$$F'(\mathrm{X}^k)(\widetilde{\mathrm{X}}^k - X^k) = -F(X^k) \tag{25}$$

donde:

$\mathrm{X}^k \in IR^n$ es el vector intervalar donde se espera encontrar la solución $X^* \in R^n$.

$X^k \in R^n$ es un vector del intervalo X^k, es decir: $X^k \in \mathrm{X}^k$.(Generalmente se toma X^k como el punto medio de X^k).

$\widetilde{\mathrm{X}}^k \in IR^n$ es el vector intervalar incógnita que se espera contenga la solución X^*.

$F'(\mathrm{X}^k) \in IR^{nxn}$ es la extensión intervalar de la matriz jacobiana de F en X^k.

Del mismo modo que para el caso de una variable, calculado $\widetilde{\mathrm{X}}^k$ resolviendo (25), la fórmula iterativa del método de Newton intervalar para un sistema con n variables resulta:

$$\mathrm{X}^{k+1} = \mathrm{X}^k \cap \widetilde{\mathrm{X}}^k \tag{26}$$

Análogamente al caso unidimensional, si $\mathrm{X}^{k+1} = \phi$, entonces no hay solución en X^k.

Para calcular $\widetilde{\mathrm{X}}^k$ resolviendo (25), se puede utilizar cualquier método conocido, como el método intervalar de Eliminación de Gauss o el método Intervalar de Gauss- Seidel [18], en este trabajo se utiliza este último.

3.2. Método Intervalar para la Resolución del Problema del Flujo de Potencia Eléctrica

Para resolver el problema (2) a través del método de Newton Intervalar, se debe encontrar el sistema intervalar correspondiente y escribirlo conforme (27). Para esto se parte de (10) que es una expresión linealizada del problema, por lo tanto bastaría escribirla en su versión intervalar, de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^k & \mathbf{N}^k \\ \mathbf{J}^k & \mathbf{L}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\theta}^k - \theta^k \\ \widetilde{\mathrm{V}}^k - V^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}^k \\ \Delta\mathbf{Q}^k \end{bmatrix} \tag{27}$$

donde:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^k & \mathbf{N}^k \\ \mathbf{J}^k & \mathbf{L}^k \end{bmatrix} = F'(\mathrm{X}^k)$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\theta}^k - \theta^k \\ \widetilde{\mathrm{V}}^k - V^k \end{bmatrix} = (\widetilde{\mathrm{X}}^k - X^k) \Rightarrow \widetilde{\mathrm{X}}^k = \begin{bmatrix} \widetilde{\theta}^k \\ \widetilde{\mathrm{V}}^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}^k \\ \Delta\mathbf{Q}^k \end{bmatrix} = F(X^k)$$

y $\mathbf{H}, \mathbf{N}, \mathbf{K}, \mathbf{L}$ son las submatrices expresadas en (11) a (18) en sus versiones intervalares, obtenidas al remplazar las variables V y θ por intervalos, es decir $\mathbf{V}$, $\theta \in IR$. Por su parte $\Delta\mathbf{P}$, $\Delta\mathbf{Q}$ son calculados utilizando (7) y (8) con los respectivos puntos medios de V_i y θ_i.

Si hacemos $\mathrm{X} = (\theta_1, \ldots, \theta_p, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_q)^T$,

$$X^k = mid(\mathbf{X}^k) = (mid(\theta_1{}^k), \ldots, mid(\theta_p{}^k), mid(\mathrm{V}_1{}^k), \ldots, mid(\mathrm{V}_q{}^k))^T \tag{28}$$

representa el vector punto medio de $\mathbf{X}^k$, donde $mid(\theta_i) = \dfrac{(\underline{\theta}_i + \overline{\theta}_i)}{2}$ y $mid(\mathbf{V}_i) = \dfrac{(\underline{V}_i + \overline{V}_i)}{2}$.

Para resolver (27) se utiliza el ***algoritmo*** 2, presentado en la sección 3.3.

Para la mayoría de los problemas prácticos, la región donde opera un sistema eléctrico es conocida [23]:

$$|\theta_i| \le \theta_{max} \text{ y } |V_i - 1| \le \varsigma, \qquad \forall i \in = \{1, \ldots, n\} \tag{29}$$

donde θ_{max} es alrededor de unos 10° y ς es menor que la unidad, entonces se puede especificar la región de interés utilizando los siguiente intervalos:

$$\theta = [-\theta_{max}, \theta_{max}], \ \mathbf{V} = [-\varsigma + 1, \varsigma + 1] \tag{30}$$

En consecuencia $\mathbf{X}^0 = (\theta_1^{\ 0},...,\theta_n^{\ 0}, \mathbf{V}_1^{\ 0},...,\mathbf{V}_p^{\ 0})^T$ donde $\theta_i^{\ 0} \subseteq \theta$ y $\mathbf{V}_i^{\ 0} \subseteq \mathbf{V}$.

3.3. Algoritmo de Solución del Sistema (27)

En el presente trabajo se utiliza el algoritmo del método de ***Newton Intervalar con Bisección Generalizada,*** para hallar todas las raíces en la región especificada. Este algoritmo en su forma básica es descrito en [7] y por conveniencia se transcribe a continuación:

Algoritmo 2

(2.1) Introducir el vector intervalar inicial $\mathbf{X}^k$ y un punto cualquiera $X^k \in \mathbf{X}^k$;

(2.2) Evaluar $F(X)$ en $X = X^k$;

(2.3) Evaluar la matriz jacobiana $F'(\mathrm{X})$ en $\mathrm{X} = \mathbf{X}^k$;

(2.4) Encontrar $\widetilde{\mathrm{X}}^k$ resolviendo el sistema (27);

(2.5) Desde $j = 1$ hasta $p+q$ hacer

Calcular: $\mathrm{x}_j^{\ k+1} = \widetilde{\mathrm{x}}_j^{\ k} \cap \mathrm{x}_j^{\ k}$;

Si $\mathrm{x}_j^{\ k+1} = \phi$ entonces ir a (2.8); {no hay raíz en $\mathbf{X}^k$ }

Calcular: $w_j^{\ k+1} = \left(\overline{\mathrm{x}}_j^{\ k+1} - \underline{\mathrm{x}}_j^{\ k+1}\right)^2$;

(2.6) Calcular: $diam(\mathrm{X}^{k+1}) = \left(\sum_{i=1}^{p+q} w_j\right)^{\frac{1}{2}}$;

(2.7) Verificar la convergencia:

a) Si el $diam(\mathbf{X}^{k+1}) \leq \zeta$, y $\left|F(\mathbf{X}^k)\right| \leq \xi$ donde ζ y ξ son tolerancias dadas, entonces una raíz es encontrada. Colocar la raíz en una lista de raíces e ir al paso (2.8);

b) Si el $diam(\mathbf{X}^k) - diam(\mathbf{X}^{k+1}) \leq \delta$, donde δ es una tolerancia dada, entonces biseccionar el vector. Poner la mitad en la pila de vectores y mantener la otra mitad como el nuevo vector para la siguiente iteración. Ir al paso (2.1);

c) Si el $diam(\mathbf{X}^k) - diam(\mathbf{X}^{k+1}) > \delta$, ir al paso (2.1);

(2.8) Si la pila de vectores no está vacía, entonces tomar un vector de la pila e ir al paso (2.1), Caso contrario, terminar el algoritmo.

Para la resolución del sistema (27) en cada iteración es utilizado un precondicionador para el método de Gauss- Seidel intervalar sugerido en [12], consistente en la inversa de la matriz de punto medio de $F'(\mathbf{X}^k)$; es decir, a cada iteración resolvemos el sistema:

$$YF'(\mathbf{X}^k)(\widetilde{\mathbf{X}}^k - X^k) = -YF(X^k) \qquad (31)$$

donde $Y = \left[F'(mid(\mathrm{X}^k))\right]^{-1}$.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para verificar la viabilidad del enfoque propuesto, se han realizado pruebas con problemas tipo (paradigmas) de la IEEE de 5 y 14 barras. Se desarrollaron programas en lenguaje C++ en base al algoritmo 2 para la versión intervalar utilizando las librerías proporcionadas por el C-XSC [13]. Las pruebas se realizaron en una PC con procesador Pentium 166MHz con 16 MB de memoria RAM, con el sistema operativo DOS. No se realizaron pruebas con sistemas eléctricos de mayores dimensiones por las limitaciones de la máquina utilizada, pero para un futuro próximo se espera presentar resultados para sistemas de mayor envergadura, utilizando otra plataforma computacional.

Los problemas tipos también fueron resueltos (en la misma plataforma) con el método *de Newton-Raphson* (puntual) para efectos de comparación.

La tabla 2 presenta los resultados experimentales obtenidos, para la versión *de Newton Intervalar con Bisección Generalizada* (B. G. I. N.) y para la versión puntual de *Newton-Raphson* (N-R). Se consideró $\xi = \zeta = \delta = 0.001$ para el primero y $\xi = 0.001$ para el segundo.

Para el método puntual se utilizó como estimación inicial 1.0 p.u. para las tensiones desconocidas y 0° para los ángulos ("*Flat Star*" [1]). Para el método intervalar, se estimaron intervalos conteniendo a estos valores.

***Tabla** 2:* Resultados experimentales

	IEEE 5		IEEE 14	
	N-R(Puntual)	B. G. I. N.(intervalar)	N-R(Puntual)	B. G. I. N.(intervalar)
Iteraciones	2	16	3	7
Tiempo [s]	0.44	2	2	12
Tolerancia	$\xi = 0.001$	$\xi = \zeta = \delta = 0.001$	$\xi = 0.001$	$\xi = \zeta = \delta = 0.001$
Desajuste de Potencia	4.35×10^{-4}	5.12×10^{-5}	9.68×10^{-5}	4.56×10^{-8}

En la tabla 2 se puede observar conforme era esperado, que el método de *Newton Intervalar con Bisección Generalizada* es computacionalmente más pesado que el método de *Newton-Rapsson* (puntual), eso quiere decir que requiere más recursos computacionales.

Ambos métodos aseguran $F(X) < \xi$, pero solo el método de *Newton Intervalar con Bisección Generalizada* asegura $diam(\mathbf{X}^k) < \zeta$, lo que permite asegurar la precisión del resultado.

En la versión intervalar se verificó una alta sensibilidad de la velocidad de convergencia en función a la estimación del intervalo inicial, por lo tanto se estableció un criterio de particionar la región de interés dada por las expresión (30) de manera a acelerar la convergencia.

Nótese que el algoritmo propuesto, cuando no encuentra la raíz, tiene la capacidad de indicar cual es el rango relativo a la variable que no contiene la solución, guiando la búsqueda de la misma, a diferencia de los método puntuales que no dan información al respecto.

5. CONCLUSIONES

La resolución de sistemas eléctricos se viene realizando con método numéricos tradicionales que asumen datos conocidos a pesar de que en realidad solo se tienen medidas aproximadas de las magnitudes físicas con sus correspondientes intervalos de confianza. Este hecho nos lleva a plantear la utilización de la matemática intervalar para la resolución de los sistemas eléctricos. En particular se presenta un método intervalar para la resolución del problema del Flujo de Potencia Eléctrica que presenta las siguientes ventajas respecto a los métodos tradicionales (puntuales):

a) Dado un intervalo de estudio, si no existe, asegura que no existe solución en él.
b) Si existe más de una solución en el intervalo de estudio, el método puede encontrar todas las soluciones.
c) Permite controlar la precisión del resultado obtenido (número de cifras significativas) directamente sobre la incógnita X y no solamente a través de variables relacionadas (como el desajuste de potencia).
d) Si bien aún no está implementado, este método puede representar parámetros como resistencias e inductancias a través de intervalos, inclusive valores no representables computacionalmente.

Como es de esperar todas estas ventajas vienen al costo de mayores recursos computacionales, lo que explica porque hasta ahora no se ha utilizado métodos intervalares para la solución computacional de grandes sistemas eléctricos. Sin embargo la rápida evolución de los sistemas computacionales hacia un mundo de abundancia de recursos computacionales y comunicaciones a bajo costo, permite vislumbrar que esta técnica podrá tener importantes aplicaciones prácticas en un futuro cercano.

Por lo arriba expuesto los autores del presente trabajo consideran que esta área de investigación es sumamente promisoria y se encuentran estudiando la aplicación de estas técnicas en otros problemas de la ingeniería eléctrica y en ambientes distribuidos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a UNESCO en la persona de la Doctora Patricia Corbo, el apoyo recibido para la realización del presente trabajo en el marco de un proyecto conjunto entre la UNA y la UFRGS.

REFERENCIAS

[1] Baran B., Kaszcurewicz E., Falcão D. M. "Team Algorithms in Distributed Load Flow Computations". *IEEE Proceedings on Generation, Trasmission and Distribution.*Vol. 142, N°6, pg. 583-588, Londres-Gran Bretaña, Noviembre de 1995.

[2] Diverio T. A., *Computação de Alta Exatidão e Alto Desempenho.*.Presentado en I Escola de Métodos Formais para Qualidade de Software. Pelotas, Brasil, 1997.

[3] Du K., Kearfott R. B. "The Cluster Problem in Multivariate Global Optimization". *The Journal of Global Optimization 5*, pg. 253-265, 1994.

[4] Gopalan V., Seader J. "Aplication of Interval Newton´s Method to Chemical Engineering Problems". *Reliable Computing 1(3)*,pg. 215-223, 1995.

[5] Hölbig C., Fernades U., Diverio T. A. *Sistemas de Equações Lineares: Instabilidade, Análise Sensitiva e Métodos Intervalares.* Relatorio de Pesquisa, CPGCC/UFRGS, Porto Alegre, Brasil, mayo de 1994.

[6] Höher C., Hölbig C., Diverio T. *Programando em Pascal XSC.* Sagra-Luzato, Porto Alegre, Brasil, 1997.

[7] Hu C. et al. "A general iterative sparse linear solver and its paralelization for interval Newton Methods". *Reliable Computing*, 1995.

[8] Kearfott R. B. "Interval Computation: Introduction, Uses, and Resources". *Euromath Bulletin* 2(1), pg. 95-112, 1996.

[9] Kearfott R. B., "INTLIB: A portable Fortran 77 Elementary Funtion Library". *ACM Trans. Math. Software 20(4),* pg. 447-459, Diciembre de 1994.

[10] Kearfott R. B. "An Interval Branch and Bound Algorithm for Bound Constrained Optimization". *Journal of Global Optimization* 2, pg. 259-280,1992.

[11] Korzenowski H. et al. *Versões intervalares do método de Newton.* Relatorio de Pesquisa, PGCC/UFRGS,Porto Alegre, Brasil, 1991.

[12] Kearfott R. B."Interval Newton Methods". *Encyclopedia of Optimization,* 1998

[13] Klatte R. et al. *C-XSC A C++ Class Library for Extended Scientific Computing.* Springer-Verlag, 1993.

[14] Kearfott R. "Interval Fxed Point Theory".*Encyclopedia of Optimization,* enero de 1996

[15] Ning S., Kearfott R. B. "A Comparison of Some Methods for Solving Linear Interval Equations". *SIAM, J. Numer. Anal. 34(1),* pg. 1289-1305. Agosto de 1997.

[16] Novoa M., Hu C., Kearfott R. B. "A Review of Preconditioners for the Interval Gauss-Seidel" *Method.Interval Computations* 1(1), pg. 59-85, 1991.

[17] Novoa M. "Theory of Preconditioners for the Interval gauss-Seidel Method, Existence/Uniqueness Theory with Interval Newton Method, and Formulas for Slopes of Powers", 1993

[18] Oliveira P., Diverio T. A. , Claudio D.M. *Fundamentos da Matemática Intervalar.* Sagra-Luzzato, Porto Alegre, Brasil, 1997.

[19] Okumura K., Higashino S. "A method for solving complex linear equation of AC networks by interval computation". *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems - ICAS ´94,* pg. 124-124, New York, 1994.

[20] Ramos R. *Partición de Sistemas Eléctricos para su Resolución Distribuida.* Tesis de grado en Ingeniería Electromecánica, Facultad de Ingeniería, UNA, Asunción, Paraguay, 1996

[21] Stevenson W. D. *Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia.* Mc Graw Hill, 1988.

[22] Stott B. "Review of Load-Flow Calculation Methods". *Proceedings of the IEEE,* Vol. 62, No 7, pg. 916-929, Julio de 1974.

[23] Wu F. "Theorical Study of the Convergence of the Fast Decoupled Load Flow". *IEEE Transactions on Power Aparatus and Systems.* Vol. Pas. 9, No. 1, Enero/Febrero de 1977.